19. ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS.

Ecuaciones exponenciales.

- Son ecuaciones en las que la incógnita aparece en el exponente de una o varias potencias.

- Si tales potencias no forman parte de términos de ninguna suma o resta, se sigue el siguiente procedimiento:

Ej: $\frac{4 \cdot 2^x}{8^x} = 2^x$

– Se descomponen en factores primos las bases de todas las potencias.

$$\frac{2^2 \cdot 2^x}{\left(2^3\right)^x} = 2^x$$

– Se eliminan los paréntesis en los exponentes de todas las potencias.

$$\frac{2^2 \cdot 2^x}{2^{3x}} = 2^x$$

– En cada miembro, se agrupan todas las potencias que tengan una misma base.

$$2^{2-2x} = 2^x$$

– Si queda una igualdad del tipo $a^n = a^m$, entonces $n = m$, y se resuelve la ecuación así obtenida, que ha dejado de ser exponencial.

$$2 - 2x = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

– Si las bases de las dos potencias son distintas, se resuelve mediante logaritmos.

Ej:

$$2^{2-2x} = 3^x \Rightarrow \log\left(2^{2-2x}\right) = \log\left(3^x\right) \Rightarrow (2-2x) \cdot \log\ 2 = \log\ 3 \cdot x \Rightarrow 2 \cdot \log\ 2 - 2 \cdot \log\ 2 \cdot x =$$
$$= \log\ 3 \cdot x \Rightarrow \left(2 \cdot \log\ 2 + \log\ 3\right) \cdot x = 2 \cdot \log\ 2 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot \log\ 2}{2 \cdot \log\ 2 + \log\ 3}$$

- Si las potencias que tienen la incógnita en el exponente forman parte de términos de alguna suma o resta, se sigue el siguiente procedimiento:

Ej: $4^x - 2^{x+1} = 8$

– Se descomponen en factores primos las bases de todas las potencias que tienen la incógnita en el exponente:

$$\left(2^2\right)^x - 2^{x+1} = 8$$

– Se obtienen potencias en los que el exponente sea la incógnita:

$$\left(2^x\right)^2 - 2 \cdot 2^x = 8$$

– Se hace un cambio de variable, llamando por ejemplo y a las potencias de exponente x:

$$y = 2^x \Rightarrow y^2 - 2y = 8$$

– Se resuelve la ecuación obtenida, que ya no es exponencial:

$$y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow y = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

– Para cada valor de y obtenido, se halla el correspondiente valor de x:

$$2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

$2^x = -2$ no tiene solución.

Ecuaciones logarítmicas.

- Son aquéllas en las que la incógnita se encuentra en la base o el argumento de un logaritmo. Sólo estudiaremos las ecuaciones en las que tales logaritmos no aparecen multiplicándose ni dividiéndose.

Ej: $\log(x+1) = \log\ x + 1$

- Se sigue el siguiente procedimiento:

– Si hay logaritmos con bases distintas, se expresan todos en una misma base (normalmente se dejan como logaritmos decimales o neperianos).

– Si aparecen términos con logaritmos y términos sin logaritmos, se llevan a un miembro los logaritmos y al otro los demás términos.

$$\log(x+1) - \log\ x = 1$$

– En cada miembro, se agrupan los logaritmos en uno solo, aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log \frac{x+1}{x} = 1$$

– Si queda , con lo que desaparecen los logaritmos. Si sólo queda logaritmo en un miembro, se aplica la definición de logaritmo.

$$\frac{x+1}{x} = 10$$

– Se resuelve la ecuación obtenida, que ya no es logarítmica:

$$x + 1 = 10x \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

– Se sustituyen las soluciones en la ecuación original. Si producen algún valor menor o igual a cero en la base o el argumento de algún logaritmo, entonces no son válidas:

$\frac{1}{9} > 0$, $\frac{1}{9} + 1 > 0$. Entonces, la solución $x = \frac{1}{9}$ es válida.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3^{x^2} = 9^x$

b) $\left(3^x\right)^2 = 9^x$

c) $8^x = 2 \cdot \sqrt[4]{2}$

d) $2^{x^2} = 5$

e) $3^{2x+1} = \frac{\sqrt{2}}{27^x}$

f) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 39$

g) $5^{2x+1} - 5^{x+2} = 2.500$

h) $3^x + 3^{2-x} = 10$

i) $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$

j) $9^x - 6 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$

k) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{x-1} = 81$

l) $2^{4x} - 2^{2x} - 12 = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x = \log_2 3 \cdot \log_3 2$

b) $x = \log_2 3^{\log_3 2}$

c) $x = \log_2 100^{\log\ 2}$

d) $\log_2 3 = \log_2 5 \cdot \log_x 3$

e) $\log_{1/3} a = x \cdot \log_3 a$

f) $\log_{27} a = x \cdot \log_3 a$

g) $\log_{\sqrt{3}} a = x \cdot \log_3 a$

h) $\log_{1/9} a = x \cdot \log_{\sqrt{3}} a$

i) $\log\ 7 = \log\ x + \log\ 3$

j) $\log_7 \frac{x}{5} + \log_7 5 = 2$

k) $\log\ 2 + \log(x-3) = \log\sqrt{2x}$

l) $\log(3x+5) - \log(2x+1) = 1 - \log\ 5$

m) $\log(4x-1) - \log(3x-2) = \log\ 2$

n) $2 \cdot \log\ x - \log(x+6) = 0$

o) $\log(x-1) - \log\sqrt{5+x} - \log\sqrt{5-x} = 0$

p) $\log(2x-3) - \log(x+1) = \log(2x-5) - \log(1-x)$

q) $3 \cdot \log\ x - \log(2x^2 + x - 2) = 0$

r) $4 \cdot \log\ x - \log\left(x^2 - \frac{4}{5}\right) = \log\ 5$

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \log\ x + \log\ y = 1 \\ \frac{x}{y} = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 9 \\ \log\ x + \log\ y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log\ x + \log\ y = 3 \\ \log\ x - \log\ y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 \cdot \log\ x - 3 \cdot \log\ y = 5 \\ 3 \cdot \log\ x + \log\ y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log\ x + 5 \cdot \log\ y = 7 \\ 5 \cdot \log\ x - \log\ y = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ \log\ x + \log\ x = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x-1} + 5^{y+1} = 9 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \log_x(4-y) = \frac{1}{2} \\ \log_y(4+x) = 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \log_x(y-3) = 2 \\ \log_y(x+3) = \frac{1}{2} \end{cases}$

k) $\begin{cases} \log(x+y) - \log(x-y) = \log\ 5 \\ \frac{2^x}{2^y} = 2 \end{cases}$