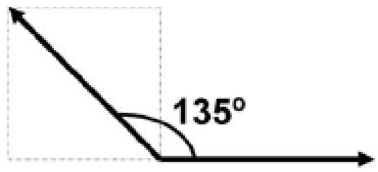
REPASO DE VECTORES

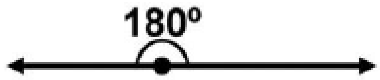
1.- a) Dibuja dos vectores que tengan el origen común, de igual módulo y que forman un ángulo de 135°.

b) Dibuja dos vectores que tengan origen común y los sentidos opuestos. ¿Qué ángulo forman dichos vectores?.

a)

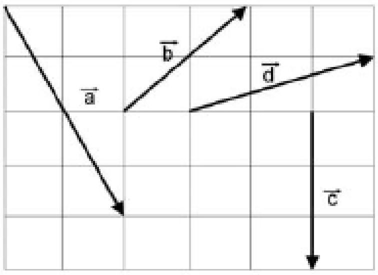


b)

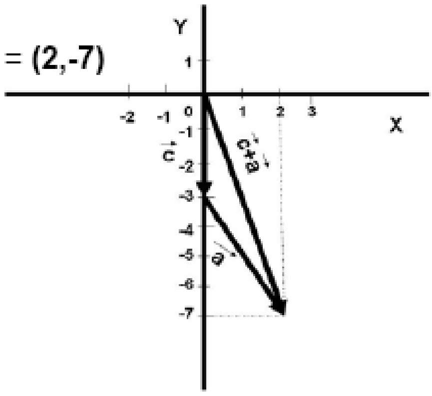


Forman un ángulo de 180º

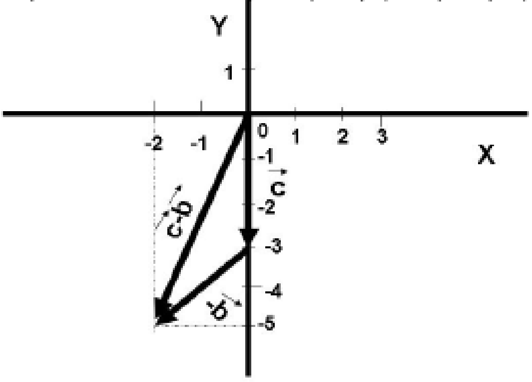
2.- a) Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$. Halla gráficamente y analíticamente:



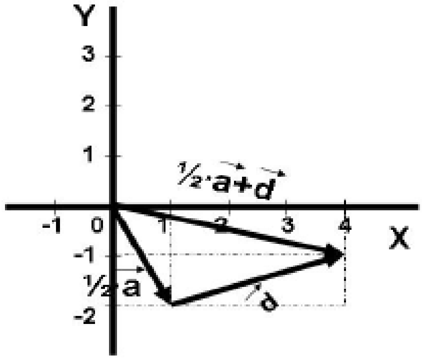
a_1) $\vec{c} + \vec{a} = (0, -3) + (2, -4) =$ **(2,-7)**



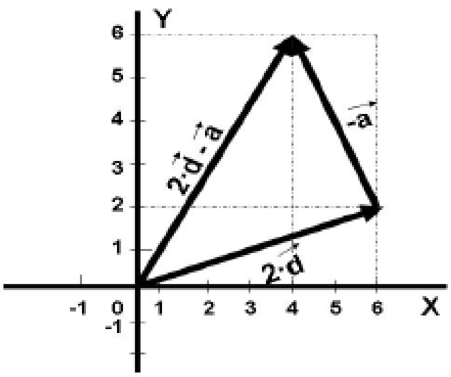
a_2) $\vec{c} - \vec{b} = \vec{c} + (-\vec{b}) = (0, -3) + (-2,-2) =$ **(- 2, - 5)**



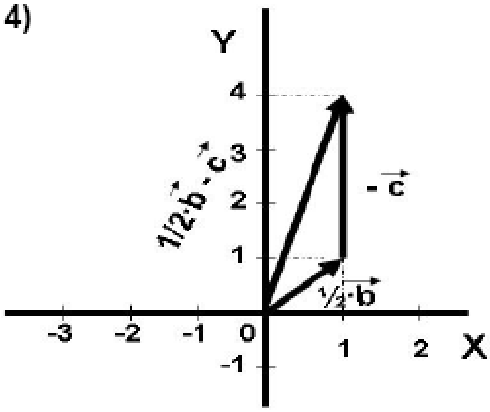
a_3) $½\cdot\vec{a} + \vec{d} = (1, -2) + (3, 1) =$ **(4, -1)**



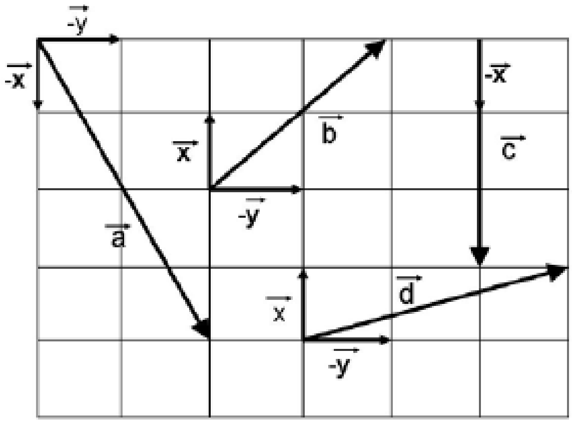
a_4) $2\cdot\vec{d} - \vec{a} = 2\cdot\vec{d} + (-\vec{a}) =$
$= (6, 2) + (-2, 4) =$ **(4, 6)**



a_5) $½\cdot\vec{b} - \vec{c} = ½\cdot\vec{b} + (-\vec{c}) = (1, 1) + (0, 3)$
$=$ **(1, 4)**



b) Poner los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{d}$ en combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.



Por tanto:

$$\vec{a} = -4\cdot\vec{x} - 2\cdot\vec{y}$$
$$\vec{b} = 2\cdot\vec{x} - 2\cdot\vec{y}$$
$$\vec{c} = -3\cdot\vec{x}$$
$$\vec{d} = \vec{x} - 3\cdot\vec{y}$$

3.- Calcular el producto escalar, módulos y el ángulo que forman, de los vectores que se dan:

a) $\vec{u} = (3,-4)$; $\vec{v} = (4,3)$

a$_1$) producto escalar: $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = (3, -4)·(4, 3) = 12 – 12 = **0**

a$_2$) Módulos: $|\vec{u}| = \sqrt{3^2+(-4)^2}$ = **5**; $|\vec{v}| = \sqrt{4^2+3^2}$ = **5**

a$_3$) Ángulo: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{0}{5\cdot 5} = 0 \Rightarrow \alpha = \text{arc cos}(0) =$ **90º**

Forman un ángulo de 90º

b) $\vec{x} = (3,-1)$; $\vec{y} = (2,7)$

b$_1$) producto escalar: $\vec{x}\cdot\vec{y}$ = (3, -1)·(2, 7) = 6 – 7 = **-1**

b$_2$) Módulos: $|\vec{x}| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$; $|\vec{y}| = \sqrt{2^2+7^2} = \sqrt{53}$

b$_3$) Ángulo: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{53}} \Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{53}}\right) =$ **92º 29´ 22´´**

Forman un ángulo de 92º 29´ 22´´

c) $\vec{a} = (-2,3)$; $\vec{b} = (12,5)$.

c$_1$) producto escalar: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ = (-2, 3)·(12, 5) = -24 + 15 = **-9**

c$_2$) Módulos: $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$; $|\vec{b}| = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{169}$ = **13**

c$_3$) Ángulo: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{-9}{\sqrt{13}\cdot 13} \Rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\dfrac{-9}{\sqrt{13}\cdot 13}\right) =$ **101º 4´ 13´´**

Forman un ángulo de 101º 4´ 13´´

4.- Calcular el valor de “a” para que el producto escalar de $\vec{x}$ = (a, 1) por $\vec{y}$ = (2,-3) sea la unidad.

$\vec{x}\cdot\vec{y}$ = 1 $\Leftrightarrow$ (a, 1)·(2, -3) =1 $\Leftrightarrow$ 2a – 3 = 1 $\Leftrightarrow$ **a = 2**

5.- Determinar el valor de b para que los vectores $\bar{x} = (3, b)$ e $\bar{y} = (2, -1)$:
a) Sean ortogonales:

$\bar{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Leftrightarrow$ (3, b)·(2, -1) = 0 $\Leftrightarrow$ 6 – b = 0 $\Leftrightarrow$ **b = 6**

b) Tengan la misma dirección:

$$\bar{x} \parallel \bar{y} \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{b}{-1} \Leftrightarrow -3 = 2b \Leftrightarrow \mathbf{b = -3/2}$$

c) Formen un ángulo de 45°.

$$\text{Cos}(45º) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6-b}{\sqrt{9+b^2} \cdot \sqrt{5}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{6-b}{\sqrt{45+5b^2}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{4} = \frac{36-12b+b^2}{45+5b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{36-12b+b^2}{45+5b^2} \Leftrightarrow 45+5b^2 = 72-24b+2b^2 \Leftrightarrow 3b^2+24b-27=0$$

$\Leftrightarrow b^2+8b-9=0 \Leftrightarrow$ **b = 1** ó **b = - 9**

Comprobación:

Si b = 1 $\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow$ 0,70 = 0,70 $\Rightarrow$ verdadera

Si b = - 9 $\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{\sqrt{9+81} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow$ 0,70 = 0,70 $\Rightarrow$ verdadera

d) Formen un ángulo de 60°.

$$\text{Cos}(60º) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{6-b}{\sqrt{9+b^2} \cdot \sqrt{5}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{6-b}{\sqrt{45+5b^2}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} = \frac{36-12b+b^2}{45+5b^2} \Leftrightarrow 45+5b^2 = 144-48b+4b^2 \Leftrightarrow b^2+48b-99=0 \Leftrightarrow$$

b = 1,98 ó **b = - 49,98**

Comprobación:

Si b = 1,98 $\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4{,}02}{\sqrt{9+3{,}92} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow$ 0,5 = 0,5 $\Rightarrow$ verdadera

Si b = - 49,98 $\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{55{,}98}{\sqrt{9+2498} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow$ 0,5 = 0,5 $\Rightarrow$ verdadera

6.- Sean los vectores $\bar{x} = (3,2)$ e $\bar{y} = (-1, a)$. Se pide:

a) Hallar el valor de "a" para que el vector $\bar{x}$ sea ortogonal al vector $\bar{x} + \bar{y}$.

Sea $\vec{z} = \bar{x} + \bar{y}$ = (3, 2) + (-1, a) = (2, 2 + a)

$\vec{x} \perp \vec{z} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{z} = 0 \Leftrightarrow (3, 2)\cdot(2, 2 + a) = 0 \Leftrightarrow 3\cdot 2 + 2\cdot(2 + a) = 0 \Leftrightarrow$

$6 + 4 + 2a = 0 \Leftrightarrow 2a = -10 \Leftrightarrow$ **a = - 5**

b) Hallar el valor de "a" para que el vector $\bar{x}$ sea paralelo al vector $\bar{x} + \bar{y}$.

$\vec{x} \parallel \vec{z} \Leftrightarrow \frac{x_1}{z_1} = \frac{x_2}{z_2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{2}{2+a} \Leftrightarrow 6 + 3a = 4 \Leftrightarrow$ **a = - 2/3**

7.- Halla la proyección del vector $\bar{u} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ sobre el vector $\bar{v} = 2\bar{i} + 5\bar{j}$.

Sean los vectores: $\bar{u} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ = (3, -2) y $\bar{v} = 2\bar{i} + 5\bar{j}$ = (2, 5).

Entonces: $proy_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{6-10}{\sqrt{4+25}} = \frac{-4}{\sqrt{29}}$

8.- Normaliza los siguientes vectores:

Normalizar un vector es obtener un vector con la misma dirección y sentido que el dado pero de módulo uno (unitario)

a) $\bar{x} = (3,-4) \Rightarrow |\vec{x}| = |(3,-4)| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{(3,-4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ vector con la misma dirección y sentido que $\vec{x}$ pero de módulo 1.

b) $\bar{a} = (-12,5) \Rightarrow |\vec{a}| = |(-12,5)| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \Rightarrow \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(-12,5)}{13} = \left(-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

c) $\bar{u} = 8\bar{i} - 6\bar{j} = (8, -6) \Rightarrow |\vec{u}| = |(8,-6)| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(8,-6)}{10} = \left(\frac{8}{10}, -\frac{6}{10}\right)$

9.- Halla m, sabiendo que $\bar{x} = (m,-5)$ y $|\vec{x}| = 13$.

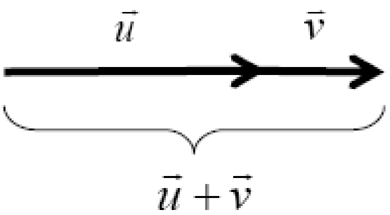
Como $|\vec{x}| = 13 \Rightarrow |\vec{x}| = |(m,-5)| = \sqrt{m^2 + (-5)^2} = \sqrt{m^2 + 25} = 13 \Rightarrow \left(\sqrt{m^2+25}\right)^2 = 13^2 \Rightarrow$ $m^2 + 25 = 169 \Rightarrow m^2 = 144 \Rightarrow m = \pm\sqrt{144} = \pm 12 \Rightarrow$ **Solución: m = ± 12**

10.- Si sabemos que | $\vec{u}$ | = 5 y | $\vec{v}$ | = 2. ¿ Cuál es el módulo de $2\cdot\vec{u}$?. ¿ Cuál es su dirección y sentido?. ¿ Y los de $-3\cdot\vec{u}$?. ¿ Puedes afirmar que | $\vec{u}+\vec{v}$ | = 5 + 2?.

a) El vector $2\cdot\vec{u}$ tendrá como módulo: $|2\cdot\vec{u}| = |2|\cdot|\vec{u}| = 2\cdot5 = 10$ y tendrá igual dirección y sentido que el de $\vec{u}$, ya que se ha obtenido multiplicando el vector $\vec{u}$ por un número positivo (2).

b) El vector $-3\cdot\vec{u}$ tendrá como módulo: $|-3\cdot\vec{u}| = |-3|\cdot|\vec{u}| = 3\cdot5 = 15$ y tendrá igual dirección que $\vec{u}$ pero distinto sentido, ya que se ha obtenido multiplicando el vector $\vec{u}$ por un número negativo (-3).

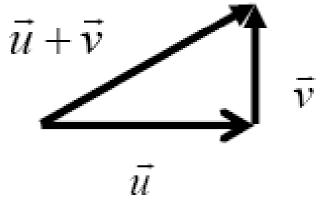
c) En el caso particular de que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan igual dirección y sentido si se cumpliría:



$\Rightarrow$ | $\vec{u}+\vec{v}$ | = 5 + 2 = 7

En general no es cierto que | $\vec{u}+\vec{v}$ | = 5 + 2 = 7

Por ejemplo:

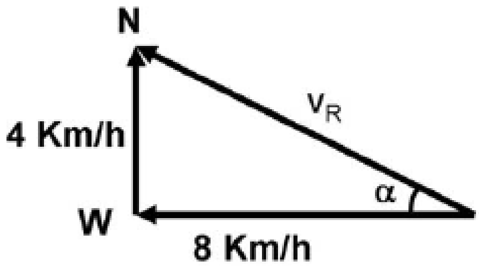


$h^2 = 5^2 + 2^2 = 29 \Rightarrow h = \sqrt{29} = 5{,}39 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ | $\vec{u}+\vec{v}$ | = 5,39

Por lo tanto: no se puedes afirmar que | $\vec{u}+\vec{v}$ | = 5 + 2 $\Rightarrow$ | $\vec{u}+\vec{v}$ | $\neq$ | $\vec{u}$ | + | $\vec{v}$ |

11.- Un barquero rema con una velocidad de 8 Km/h en dirección oeste; de pronto aparece una corriente que lleva una velocidad de 4 Km/h hacia el norte. ¿ Hacia dónde se desplazará la barca?. ¿ Con que velocidad?.



Velocidad resultante:

$$v_R = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 8{,}94 \text{ Km/h}$$

La barca se desplazará hacia el Noroeste.

$$Tg(\alpha) = \frac{4}{8} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{8}\right) = 26^\circ\, 33'\, 54''$$

Se desviará en dirección norte 26º 33´ 54´´, de su primera trayectoria en dirección oeste.