OPERACIONES CON LÍMITES DE SUCESIONES.

- **Operaciones con sucesiones convergentes:** Si las sucesiones a_n y b_n tienen límite finito y las operaciones tienen sentido, se verifican las siguientes propiedades:

  - **Suma:** $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$
  - **Diferencia:** $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$
  - **Producto:** $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$
  - **Cociente:** $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$
  - **Multiplicación por un número:** $\lim(k \cdot a_n) = k \cdot \lim a_n \quad \forall k \in \Re$
  - **Potencia:** $\lim\left(a_n^{b_n}\right) = (\lim a_n)^{\lim b_n}$

- **Operaciones con sucesiones divergentes:** Si las sucesiones a_n y b_n tienen límite infinito y las operaciones tienen sentido, se verifican las siguientes propiedades $\forall k \in \Re$:

  - **Suma:**

    $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) \qquad (-\infty) + k = (-\infty) \qquad (-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$

  - **Producto:**

    $(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \qquad (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \qquad -(+\infty) = (-\infty)$

    $$\text{Si } k > 0 \begin{cases} (+\infty)\cdot k = (+\infty) \\ (-\infty)\cdot k = (-\infty) \end{cases} \qquad \text{Si } k < 0 \begin{cases} (+\infty)\cdot k = (-\infty) \\ (-\infty)\cdot k = (+\infty) \end{cases}$$

  - **Cociente:**

    $$\frac{k}{\pm\infty} = 0 \qquad \frac{k}{0} = \pm\infty$$

  - **Potencia:**

    $$(+\infty)^{(+\infty)} = (+\infty) \qquad (+\infty)^{(-\infty)} = 0$$

    $$\text{Si } k > 0 \quad (+\infty)^k = (+\infty) \qquad \text{Si } k < 0 \quad (+\infty)^k = 0$$

    $$\text{Si } k > 1 \begin{cases} k^{(+\infty)} = (+\infty) \\ k^{(-\infty)} = 0 \end{cases} \qquad \text{Si } 0 < k < 1 \begin{cases} k^{(+\infty)} = 0 \\ k^{(-\infty)} = (+\infty) \end{cases}$$

Determinadas operaciones no tienen sentido y no se pueden hacer directamente, se llaman **indeterminaciones** y se resolverán en el tema siguiente como un caso particular de límites de funciones, las indeterminaciones más importantes son:

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad 0\cdot(\pm\infty) \qquad \infty-\infty \qquad 1^{(\pm\infty)} \qquad (\pm\infty)^0 \qquad 0^0$$

1. Calculo de límites de sucesiones.

- **El limite de una sucesión constante** $\{ a_n \} = \{ k \} = \{k, k, k, k, k\ldots\ldots\}$ es la misma constante:

  $$\lim k = k$$

  Ejemplo: lim 3 = 3 por que sería la sucesión {3, 3, 3, 3 ….}

- **Límite de sucesiones polinómicas y de cocientes polinómicos:** Toda sucesión polinómica P(n), de grado igual o mayor que 1, es divergente y su límite es ∞ o $-\infty$, según que el coeficiente del término de mayor grado sea positivo o negativo. En el cálculo del límite del cociente de sucesiones polinómicas no se puede aplicar el teorema del cociente de los límites, pues se obtiene una expresión indeterminada de la forma $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Para hallar el límite correspondiente se dividen el numerador y el denominador por la mayor potencia que aparece en la expresión, y luego se calcula el límite.

Ejemplo:

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3n^2+2n-5}{n^2-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{n^3}-\frac{3n^2}{n^3}+\frac{2n}{n^3}-\frac{5}{n^3}}{\frac{n^2}{n^3}-\frac{4}{n^3}} = \text{simplificando}$$

cada fracción obtenemos $= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{\frac{1}{n}-\frac{4}{n^3}}$ = ahora hacemos el límite de nuevo $= \frac{1}{0} = \infty$.

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4n+2}{3n^2-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{4n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{4}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}{3-\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-5n}{3n^2-7} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{n^3}-\frac{5n}{n^3}}{\frac{3n^2}{n^3}-\frac{7}{n^3}} \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{5}{n}}{\frac{3}{n}-\frac{7}{n^3}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

- Indeterminación $\infty - \infty$.

a) En el cálculo de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n}-\frac{n^3+1}{n^2-1}\right)$, no se puede aplicar la regla del límite de la diferencia, pues llagaríamos a la forma indeterminada $\infty-\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n}-\frac{n^3+1}{n^2-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n+1}{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n^2-1} = \infty-\infty$. Para resolver esta indeterminación se hace primero la sustracción y luego se halla el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n}-\frac{n^3+1}{n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4-n^3+n^2-n^2+n-1-n^4-n}{n\cdot\left(n^2-1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n^3-1}{n^3-n} = \frac{-1}{1} = -1.$$

b) En la resolución de: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)$ aparece la forma indeterminada $\infty-\infty$ pero si se multiplica y se divide a $\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)$ por su conjugado, resulta otra expresión equivalente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2-1}+n\right)}{\sqrt{n^2-1}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1-n^2}{\sqrt{n^2-1}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n^2-1}+n} = \frac{-1}{\infty} = 0.$$

c) A veces es necesarias varias transformaciones para resolver una indeterminación, como la del ejemplo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n}\ -n\right)}{\sqrt{n}\ +1-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n}\ -n\right)\left(\sqrt{n}\ +n\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n}\ +1-n\right)\left(\sqrt{n+1}+n\right)\cdot\left(\sqrt{n}+n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+n\right)}{\left(n+1-n^2\right)\cdot\left(\sqrt{n}+n\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-n^2}{n+1-n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n}+n} == 1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{n}{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n}}} = 1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+1}}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = 1\cdot 1 = 1.$$

- **El número e**

Al calcular el límite de la sucesión: $\{a_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nos encontramos con la expresión determinada 1^∞, esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty$.

Para resolver dicha indeterminación, estudiamos la sucesión dad:

a) **La sucesión** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **es creciente**. Si damos valores hallando los primeros términos de esta sucesión:

$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$ $\qquad$ $a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$

$a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2{,}44$ $\qquad$ $a_{100} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}70481383$

Observamos que la sucesión es creciente e incluso se puede demostrar que es monótona creciente.

b) **La sucesión** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **está acotada**. La cota inferior de la sucesión es 2, ya que la sucesión es creciente y $a_1 = 2$ mientras que la cota superior es 3.

c) **Conclusión** la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **es creciente y está acotada** y, en consecuencia, es convergente. Su límite es un número irracional que se designa con la letra **e** y se llama **número de Neper**.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$